UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
DEPARTAMENTO DE MECÁNICA
VIBRACIONES MECÁNICAS 1ER PARCIAL (13/05/2011)

25/25 ¡Muy Bien!

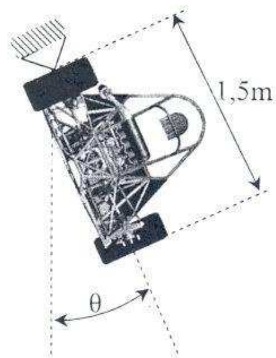
NOMBRE: ____________________ CARNET: ____________

Problema 1. 10pts.

respecto al centro de masa (longitudinal)

Se desea conocer el valor de la masa y la inercia rotacional de un vehículo Fórmula SAE con ancho máximo de 1,5m. Al no disponer de balanzas adecuadas, se decide aplicar la siguiente metodología: Se suspende el vehículo por sus ruedas del lado izquierda, tal como muestra la figura y se le dan las siguientes condiciones iniciales: $\theta(0)=10^o$ y $\omega(0)=0$rad/s. Se observa que el vehículo realiza 8 oscilaciones en 15 segundos. Luego se realiza otra prueba. Se monta al piloto de 80kg en el vehículo y se le dan las siguientes condiciones iniciales: $\theta(0)=5^o$ y $\omega(0)=0$rad/s. Se observa que el vehículo con el piloto realizan 6 oscilaciones en 14 segundos.

10

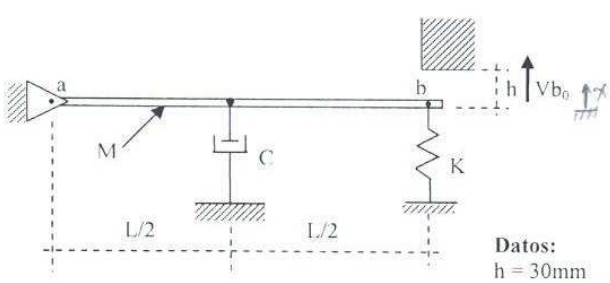


Problema 2. 15pts.

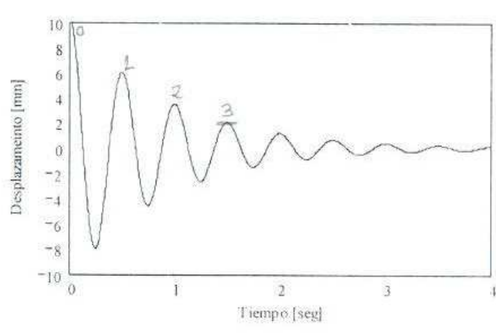
Se tiene una **Barra a-b Rígida de masa M** unida a una pared por medio de una articulación plana, el extremo libre de la barra está unido a tierra a través de un resorte de constante **K**, adicionalmente el sistema posee un amortiguador de constante **C** ubicado a L/2 del extremo libre. La figura muestra al sistema en su posición de equilibrio estable, también se presenta una **Respuesta Libre del Extremo de la Barra** ante ciertas condiciones iniciales. Se desea:

a) Encontrar la Ecuación Diferencial que describe el comportamiento del sistema
b) Encontrar el valor de la frecuencia natural y factor de amortiguación.
c) Supongamos que ahora se le aplican otras condiciones iniciales al sistema. La posición inicial es la Posición de Equilibrio Estático (PEE). Encontrar el valor de "Vb_0" (velocidad inicial del punto "b") máximo para que el extremo de la barra no choque con el tope que está a "h" de distancia respecto de la PEE inicial.

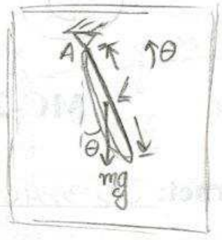
15



Datos:
h = 30mm
~~Ω = 15 rad/s~~
M = 3kg
g = 10m/s^2

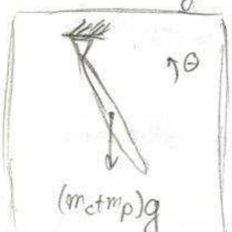


Problema 1



Se dibuja el vehículo como una barra de masa m y longitud (esto es válido por la hipótesis de simetría del carro) Por el DCL, tomando momento en A, y considerando que es un problema plano y el punto A está en reposo respecto a tierra, la segunda Ley nos dice $-mg\frac{L}{2}\operatorname{sen}\theta = I_A\ddot{\theta}$ donde I_A es la inercia del vehículo respecto a A. Entonces $I_A\ddot{\theta}+\frac{1}{2}mgL\operatorname{sen}\theta=0$ Como $\theta<15^\circ \Rightarrow \operatorname{sen}\theta\approx\theta \Rightarrow I_A\ddot{\theta}+\frac{1}{2}mgL\theta=0$
Dado que $\zeta=0$ ($c_{eq}=0$), el sistema es no amortiguado. Así $T=\frac{15\,sg}{8\,osc}=1{,}88\,sg$.

$$\Rightarrow \omega_n=\frac{2\pi}{1{,}88\,sg}=3{,}35\,rad/sg \Rightarrow \omega_n=\sqrt{\frac{K_{eq}}{M_{eq}}}=\sqrt{\frac{\frac{1}{2}mgL}{I_A}} \Rightarrow I_A\omega_n^2=\frac{1}{2}m_c gL \Rightarrow I_A=\frac{gL}{2\omega_n^2}m_c=(0{,}67m^2)m_c$$



Sea $m_p=80Kg$ la masa del piloto. Se tienen las mismas condiciones que en el vehículo solo. Del DCL del sistema vehículo-piloto se tiene que:

$$-(m_c+m_p)g\frac{L}{2}\operatorname{sen}\theta=\left(I_A+m_p\left(\frac{L}{2}\right)^2\right)\ddot{\theta}$$ (se considera el piloto en el centro del vehículo)

$$\Rightarrow \left(I_A+\frac{1}{4}m_pL^2\right)\ddot{\theta}+\frac{1}{2}(m_p+m_c)gL\theta=0 \Rightarrow \omega_n=\sqrt{\frac{\frac{1}{2}(m_p+m_c)gL}{I_A+\frac{1}{4}m_pL^2}}$$ donde

$$\omega_n=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{\frac{11\,sg}{6\,osc}}=3{,}43\,rad/sg.$$

$$\Rightarrow \left(I_A+\frac{1}{4}m_pL^2\right)\omega_n^2=\frac{1}{2}(m_p+m_c)gL \Rightarrow \left[(0{,}67m^2)m_c+45Kgm^2\right]\left(11{,}77\frac{rad}{sg^2}\right)=(80Kg+m_c)\left(7{,}5\frac{m^2}{sg^2}\right)$$

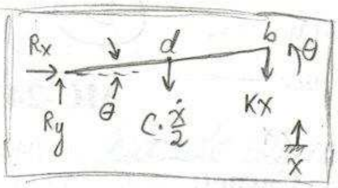
$$\Rightarrow (7{,}89m^2)m_c+529{,}65Kgm^2=600Kgm^2+(7{,}5m^2)m_c \Rightarrow 0{,}39m_c=70{,}35\,Kg \Rightarrow \boxed{m_c=180{,}38Kg}$$

Así, $I_A=(0{,}67m^2)(180{,}38Kg)=120{,}86\,Kg\,m^2$.

Por el teorema de ejes paralelos $I_C=I_A-m_c\left(\frac{L}{2}\right)^2=120{,}86Kgm^2-(180{,}38Kg)\left(\frac{1{,}5m}{2}\right)^2$

$$\Rightarrow \boxed{I_C=19{,}39\,Kg\,m^2}$$

Problema 2



Se toman los sistemas de coordenadas que se muestran en la figura. Por semejanza de triángulos, $x_d = \frac{x}{2}$ $(x = x_b)$ por lo que $\dot{x}_d = \frac{\dot{x}}{2}$. Tomando momento en el punto fijo a y observando que es un problema plano, se tiene:

$-\left(\frac{L}{2}\cos\theta\right) c\frac{\dot{x}}{2} - (L\cos\theta)Kx = \frac{1}{3}ML^2\cdot\ddot{\theta}$. Suponiendo L suficientemente grande ($\theta < 15° = \frac{\pi}{12}$ rad, $x_{max} = 10mm$, $x = L\,sen\theta = L\theta \Rightarrow L = \frac{x}{\theta} > \frac{10mm}{\frac{\pi}{12} rad} = 38,20\ mm$) se toma $\theta < 15°$ y $L\theta = x \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{\ddot{x}}{L}$ y $\cos\theta \simeq 1$. Entonces $-\frac{1}{4}\cancel{L}c\dot{x} - \cancel{L}Kx = \frac{1}{3}M\cancel{L}\ddot{x} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{3}M\ddot{x} + \frac{1}{4}c\dot{x} + Kx = 0}$ 6/6

De la gráfica se tiene 2 osc/sg $\Rightarrow T = 0,5\ sg \Rightarrow \boxed{\omega_d = \frac{2\pi}{0,5\ sg} = 12,57\ rad/sg}$

Por otro lado $\Lambda_3 = \ln\left(\frac{x_0}{x_3}\right) = \ln\left(\frac{10mm}{2mm}\right) = \ln 5 = 1,61$ y $\boxed{\zeta = \frac{1,61}{\sqrt{(2\pi\cdot 3)^2 + (1,61)^2}} = 0,09}$

$\Rightarrow \boxed{\zeta = 0,09}$ y $\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{12,57\ rad/sg}{\sqrt{1-0,09^2}} = 12,62\ rad/sg \Rightarrow \boxed{\omega_n = 12,62\ rad/sg}$ 5/5

En el desarrollo de la ecuación general de movimiento de la barra no se tomó en cuenta el peso de la misma puesto que la configuración de la figura es la PEE donde el resorte se encuentra deformado y contrarresta dicho peso. Es claro que esta deformación previa del resorte no se considera.

Como $0 < \zeta < 1$ entonces se tiene el caso sub-amortiguado (correspondiente a la gráfica del problema). Así, $x(t) = e^{-\zeta\omega_n t}(A\cos(\omega_d t) + B\,sen(\omega_d t))$ o $x(t) = \sqrt{A^2+B^2}\,e^{-\zeta\omega_n t}\cos(\omega_d t - \phi)$ donde $A = x_0 = 0mm$ y $B = \frac{v_0 + \zeta\omega_n x_0}{\omega_d} = \frac{v_0}{\omega_d}$ $(\dot{x}(0) = v_0)$. El mayor valor de $x(t)$ se alcanza aproximadamente en $t_m = \frac{\phi}{\omega_d}$. Como $ctg\,\phi = \frac{A}{B} = 0 \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t_m = \frac{\pi/2}{12,57\ rad/sg} = 0,12\ sg$

$\Rightarrow$ Si $x_{max} = h \Rightarrow h = \sqrt{A^2+B^2}\,e^{-\zeta\omega_n t_m} = Be^{-\zeta\omega_n t_m} = \frac{v_0}{\omega_d}e^{-\zeta\omega_n t_m} \Rightarrow v_0 = h\,\omega_d\,e^{\zeta\omega_n t_m}$

$\Rightarrow v_0 = (30mm)(12,57\ rad/sg)\,e^{0,09(12,62\ rad/sg)(0,12\ sg)} \Rightarrow \boxed{v_0 = 434,61\ mm/sg \approx 0,43\ m/sg}$

4/4